DS n°2 : Calcul (etc.)

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ±1 point.
La difficulté des exercices est progressive.

Exercice 1 : Calcul de sommes

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i(3i - 2n)$

2) Calculer $S_2 = \displaystyle\sum_{j=0}^{2024} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right)^j$ (dans cette question, i désigne le nombre complexe usuel)

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$

Exercice 2 : Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes :

1) $|2x - 5| = -1 - x$ dans $\mathbb{R}$.

2) $\cos x = \sin x$ dans $\mathbb{R}$.

3) $2x - \sqrt{x} - 1 \leq 0$ dans $\mathbb{R}$.

4) $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1$ dans $\mathbb{R}$

5) $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 3 : Ensembles

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1) Montrer que $(A \cup B) \cap C \ \subset \ A \cup (B \cap C)$.

2) Avec un contre-exemple simple, montrer que l'inclusion réciproque est fausse en général.

3) Démontrer que $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ si et seulement si $A \subset C$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 : Une formule de retournement de sommes

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

2) Soit $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Comparer les valeurs de

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

Exercice 5 : Partie entière

Montrer l'assertion suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 6 : Complexes

Soit $z, u, v \in \mathbb{C}$ tels que $z = u + i\,v$. Montrer que

$$|z|^2 = u^2 + v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big((u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ou} \quad z = 0 \Big)$$

C'est l'histoire d'une mathématicienne férue de logique qui vient d'accoucher. Sa mère arrive et lui demande “C'est un garçon ou une fille ?”, et elle répond “Oui”.